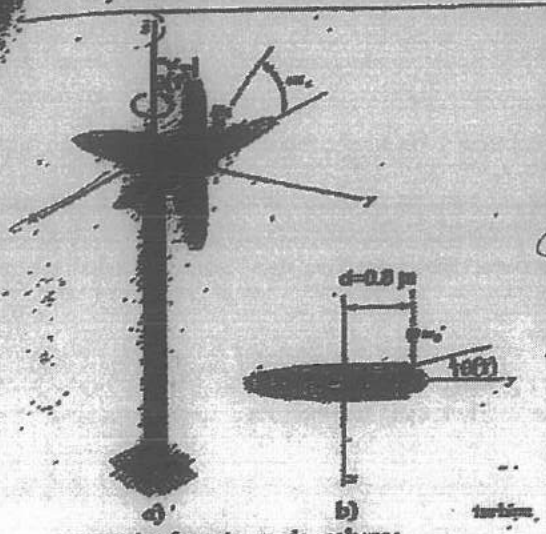
Exame de 2003-01-10
Parte prática - 10 valores



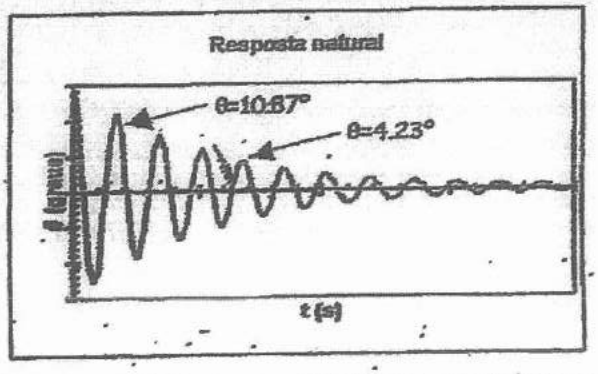
1) A turbina eólica representada na figura está suportada por uma coluna de rigidez torsional $k=9.6\times10^4$ Nm/rad e coeficiente de amortecimento c_t. O centro de massa do sistema rotor da turbina de massa $m_0=1957$ kg encontra-se deslocado de uma distância "e" do eixo de rotação Oy do conjunto. O momento de inércia da turbina segundo o eixo Oz é $I_z=70$ kgm^2. A turbina roda a 250 rpm.

Desprezando os efeitos de flexão da coluna, determinar:

a) a equação diferencial do movimento de vibração de torção da coluna em torno do eixo Oz.

Num ensaio em regime livre registou-se a resposta $\theta(t)$ do sistema que se representa na figura. Determinar:

b) a razão de amortecimento ξ e a constante de amortecimento c_t da coluna;



c) a frequência natural amortecida ω_d;

d) a excentricidade máxima "e" de modo a que em regime permanente a amplitude de vibração não exceda 2.5°.

e) a expressão do momento torsor transmitido à base da coluna de suporte.

2) Um veio de dois tramos está fixo em $x=0$ e livre em $x=\ell$, e a secção recta apresenta um momento polar $2I_p$ para $0<x<\frac{\ell}{3}$ e I_p para o tramo $\frac{\ell}{3}<x<\ell$. O material do veio possui módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. Utilizando as funções de aproximação $\Theta_1(x)=\sin\frac{\pi x}{2\ell}$ e $\Theta_2(x)=\sin\frac{3\pi x}{2\ell}$,

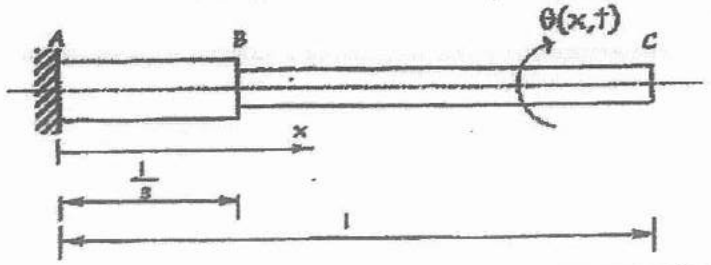
a) Esboçar a representação gráfica das duas funções de aproximação e classificá-las;

b) Determinar, pelo método da energia de Rayleigh, uma estimativa da frequência natural fundamental de torção;

c) Determinar, pelo método de Rayleigh-Ritz, uma estimativa das frequências naturais e das respectivas formas naturais de vibração de torção;

d) Estabelecer a equação de frequências naturais de vibração de torção.

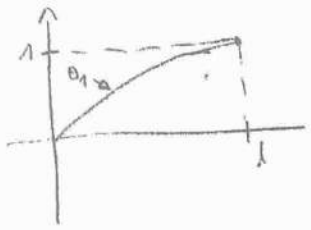
e) Aproximando o veio representado por um veio de secção constante de momento polar I_p, determinar a resposta $\theta(x,t)$ para um momento torsor $M_t(t)=M_0\sin\omega t$ aplicado na extremidade $x=\ell$.

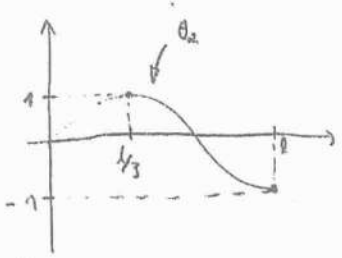


Parte Prática

2. a) $\theta_0 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi/2l} = 4l$

$\theta_1 \rightarrow T = \frac{2\pi}{3\pi/2l} = \frac{4l}{3}$





Ambas as funções são deriváveis sempre.

Condições fronteira:

$\theta_1(x)\big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2l}\cdot 0\right) = 0$ ✓

$\left.\frac{d\,\theta_1(x)}{dx}\right|_{x=l} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2l}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2l}x\right) = 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$ Logo trata-se de uma função teste.

$\theta_2(x)\big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2l}\times 0\right) = 0$ ✓

$\frac{d\,\theta_2(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{2l}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2l}x\right) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

(40)

b) Utilizou-se θ_1 por ser mais próxima da forma fundamental.

En. potencial:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l G I_p(x)\left(\frac{d^2\theta_1(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \cancel{V_{ext}}^{0} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}GI_p}{2}\int_0^l \left(-\frac{\pi^2}{2l}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right)^2 dx + \frac{GI_p}{2}\int_{\frac{l}{3}}^{l}\left(-\frac{\pi^2}{2l}\sin\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right)^2 dx =$$

$$= GI_p\left(\frac{-3\pi^3\sqrt{3}+2\pi^4}{48l} - 0\right) + \frac{GI_p}{2}\left(\frac{\pi^4}{8l} - \frac{-3\pi^3\sqrt{3}+2\pi^4}{48l}\right) =$$

$$= GI_p\left(\frac{\pi^4}{16l} + \frac{-15\pi^3\sqrt{3}+\pi^4}{48l}\right)$$

En. Cinética:

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho I_p\left(\theta_1(x)\right)^2 dx + \cancel{T_{ext}}^{0}\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\frac{1}{3}\rho I_p}{2}\int_0^{l/3}\left(\sin\frac{\pi}{3l}x\right)^2 dx + \frac{\rho I_p}{2}\int_{l/3}^{l}\left(\sin\frac{\pi}{2l}x\right)^2 dx\right) =$$

$$= \omega^2\left(\rho I_p\left(\frac{-l(3\sqrt{3}-2\pi)}{12\pi} - 0\right) + \frac{\rho I_p}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{-l(3\sqrt{3}-2\pi)}{12\pi}\right)\right) =$$

$$= \omega^2\left(\rho I_p\left(\frac{l}{4} + \frac{-l(1{,}5\sqrt{3}-\pi)}{12\pi}\right)\right)$$

$$R(\theta(x)) = \omega^2 = \frac{G\cancel{\pi}\left(\frac{\pi^4}{16\ell} + \frac{-1{,}5\pi^3\sqrt{3} + \pi^4}{16\ell}\right)}{\ell\cancel{\pi}\left(\frac{1}{4} + \frac{-\ell(1{,}5\sqrt{3} - \pi)}{12\pi}\right)} =$$

$$= \frac{G}{\ell} \cdot \frac{\frac{3\pi^4 - 1{,}5\pi^3\sqrt{3}}{48\ell}}{\frac{48\ell - 1{,}5\ell\sqrt{3}}{12\pi}} = C^2 \cdot \frac{3\pi^3 - 1{,}5\pi^2\sqrt{3}}{16\pi\ell^2 - 6\ell^2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = C \cdot \sqrt{\frac{3\pi^3 - 1{,}5\pi^2\sqrt{3}}{16\pi\ell^2 - 6\ell^2\sqrt{3}}}$$

c) Não sei

d) O meio tem 2 trocos de secção constante.

$$\theta_1(x,t) = \left(A_1 \cos\frac{\omega}{c}x + B_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\theta_2(x,t) = \left(A_2 \cos\frac{\omega}{c}x + B_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\frac{\partial\theta_1(x,t)}{\partial x} = \frac{\omega}{c}\left(-A_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x + B_1\cos\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\frac{\partial\theta_2(x,t)}{\partial x} = \frac{\omega}{c}\left(-A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x + B_2\cos\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

(41)

Cond. fronteira:

$$\theta_1(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{A_1 = 0}$$

$$\frac{\partial\theta_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0 \Leftrightarrow -A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}\ell + B_2\cos\frac{\omega}{c}\ell = 0 \Leftrightarrow \boxed{B_2 = A_2 \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\ell}$$

$A_2 \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\ell \cdot \cos$

$$\theta_1(x,t)\Big|_{x=\frac{\ell}{3}} = \theta_2(x,t)\Big|_{x=\frac{\ell}{3}} \Leftrightarrow B_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} = A_2\cos\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} + B_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B_1 = A_2 \operatorname{cotg}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} + B_2 \Rightarrow \boxed{B_1 = A_2\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} + \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\ell\right)}$$

$$\cancel{G}\cancel{2}\cancel{\pi}\frac{\partial\theta_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{\ell}{3}} = \cancel{G}\cancel{\pi}\frac{\partial\theta_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{\ell}{3}} \Leftrightarrow 2B_1\cos\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} =$$

$$= -A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} + B_2\cos\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} \Leftrightarrow 2B_1 = -A_2 \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} + B_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2B_1 = A_2\left(-\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} + \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\ell\right) \Leftrightarrow \boxed{B_1 = \frac{A_2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\ell - \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3}\right)}$$

Então:

$$\frac{A_2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\ell - \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3}\right) = A_2\left(\operatorname{cotg}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} + \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\ell\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2\operatorname{cotg}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} + \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\ell + \operatorname{tg}\frac{\omega}{c}\frac{\ell}{3} = 0}$$

Eq. das frequências naturais de vibração de torção.

e) Não sei.

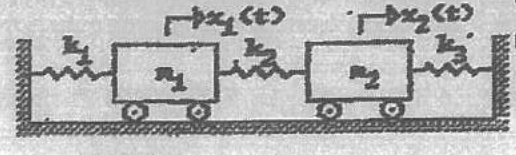
FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Vibrações de Sistemas Mecânicos

Exame de 2003-01-10
Parte teórica - 10 valores

1) Para um sistema vibratório, definir:
   a) frequência natural de vibração;
   b) frequência de ressonância de amplitude e de fase;
   c) batimento.

2) O amortecimento desempenha um papel importante no comportamento vibratório de um sistema mecânico.
   a) Caracterizar a influência do amortecimento do sistema na resposta a uma solicitação harmónica e transiente;
   b) Discutir a influência do amortecimento na eficiência do isolamento de vibrações;
   c) Indicar e caracterizar sucintamente dois métodos de determinação experimental do amortecimento de um sistema.

3) Os vectores modais representativos das formas naturais de vibração de um sistema linear discreto não amortecido e com dois graus de liberdade representado na figura são: $\{u\}_1^T = \{1 \quad 1.6\}^T$ e $\{u\}_2^T = \{1 \quad -0.8\}^T$.



   a) Definir modo natural e forma natural de vibração;
   b) Representar graficamente o movimento $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas massas do sistema para o segundo modo natural de vibração;
   c) Indicar um conjunto de condições iniciais a aplicar ao sistema de modo que este responda com um movimento idêntico ao primeiro modo natural de vibração;
   d) Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\sin\omega t$, caracterizar a resposta do sistema e representar graficamente a respectiva amplitude de resposta, indicando eventuais pontos notáveis.

4) A análise do comportamento dinâmico de um sistema mecânico assenta num modelo matemático: modelo espacial, modelo modal e modelo de resposta em frequência.
   a) Caracterizar, justificando, as formas da energia potencial elástica e da energia cinética;
   b) O modelo de resposta em frequência pode ser determinado a partir do modelo espacial ou do modelo modal. Comentar.
   c) Representar graficamente a função de resposta em frequência directa de um sistema linear discreto com 3 graus de liberdade e as respectivas contribuições modais.

5) A resposta dinâmica de um sistema contínuo é determinada por análise ou sobreposição modal.
   a) Indicar a propriedade fundamental em que assenta esta técnica;
   b) Justificar a utilização de uma base modal truncada;
   c) Referir os critérios básicos que condicionam a escolha da base modal;
   d) Indicar em que condições específicas um determinado modo não contribui para a resposta do sistema.

6) O quociente de Rayleigh constitui um conceito relevante em análise de vibrações.
   a) Indicar as propriedades fundamentais do quociente de Rayleigh;
   b) Como justificar que uma aproximação porventura "grosseira" de uma forma natural de vibração conduza, através do quociente de Rayleigh, a uma boa aproximação da frequência natural correspondente?
   c) Indicar os valores limite do quociente de Rayleigh para os sistemas discretos e para os sistemas contínuos;
   d) Indicar os requisitos da aproximação a utilizar no quociente de Rayleigh para os sistemas discretos e para os sistemas contínuos.

Exame - 2003 - 01 - 10

Parte Teórica

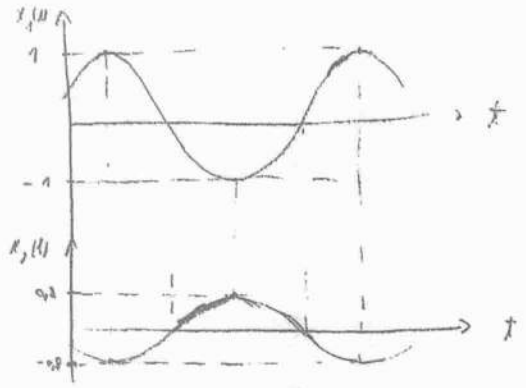
3. a) Modo Natural:

É um dos n movimentos harmónicos síncronos $\{x(t)\}_i$ com $i=1,\dots,n$ caracterizados pelas frequências naturais ω_i com $i=1,\dots,n$ e pelos vectores modais $\{u\}_i$ $i=1,\dots,n$, que são solução do problema característico.

Forma Natural:

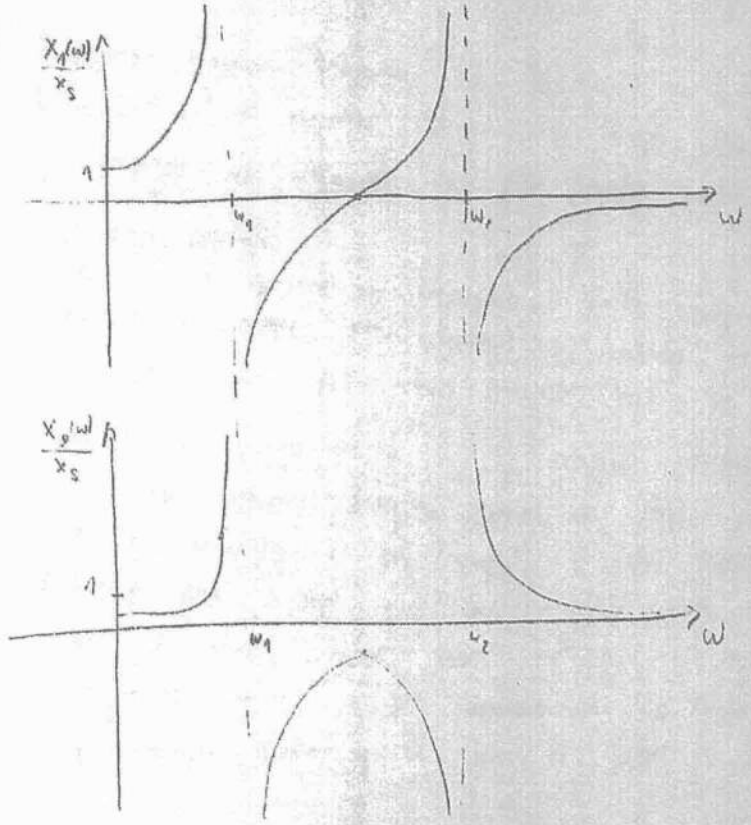
Configuração espacial assumida pelo sistema, que é representada por um vector modal $\{u\}_i$ $i=1,\dots,n$ associada a uma frequência natural ω_i $i=1,\dots,n$.

b) $$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}8 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$



c) $\{x_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}6 \end{Bmatrix}$; $\{\dot{x}_0\} = \{0\}$; $\{f(t)\} = \{0\}$ (regime livre)

d)



Assumi que $f(t)$ estava aplicada em 1.

Caracterização:

- $\omega < \omega_1$ movimento em fase
- $\omega_1 < \omega < \omega_2$ movimento em fase e em oposição de fase

. $\omega > \omega_2$ movimentos em oposição de fase

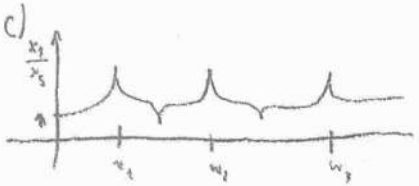
. Existe um valor particular de ω para o qual $X_1(\omega)$ é nulo.

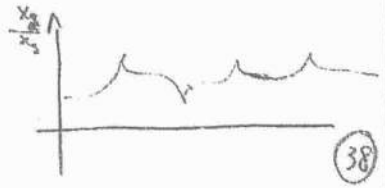
4. a) A energia cinética é uma forma quadrática definida positiva uma vez que é calculada a partir da matriz de massa (do quadrado das velocidades, sendo a matriz de massa definida positiva.

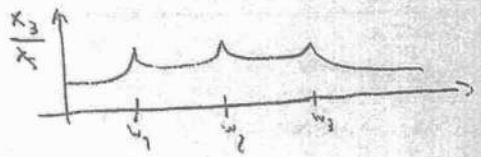
A energia potencial é uma forma quadrática, geralmente, definida positiva mas que no caso de sistemas semi-definidos passa a ser semi-definida positiva (ou alguns valores próprios anulos). Isto porque a matriz de rigidez é semi-definida positiva para este caso).

b) É verdade porque qualquer um dos modelos permite a obtenção da resposta como sendo uma entidade complexa (...) permite o seu traçado em magnitude e fase em função da frequência

c)







A influência de cada modo faz-se sentir quando ω está mais próximo da sua frequência natural associada.

5. a) A propriedade fundamental em que se baseia a técnica de sobreposição modal é a ortogonalidade das formas naturais dos modos modais, uma vez que é esta propriedade que garante que os vectores modais são linearmente independentes e que, portanto, a sua combinação linear pode descrever qualquer vector no espaço de dimensão m (sendo m o nº de vectores modais).

b) Utiliza-se uma base modal truncada porque ao se seleccionar os modos mais influentes na resposta do sistema e se eliminar os restantes o esforço computacional é muito reduzido.

c) Escolher dos modos de mais baixa energia (mais baixa frequência) e, em particular, escolher os modos associados a frequências naturais próximas das frequências de excitação.

d) No caso de solicitações concentradas coincidirem com os modos desse modo ou no caso de uma diferença inicial que seja a combinação de um ou mais

vectores modais combinados sem incluir o modo em causa e o movimento ser em regime livre.

6. a) . O quociente de Rayleigh é um majorante da frequência fundamental;
. apresenta um valor aproximado na vizinhança das formas naturais

b) Pela 2ª propriedade atrás enunciada.

c) Sistemas discretos:

$$w_1^2 \leq R(\{v\}) \leq w_n^2$$

(com w_1 sendo a freq. fundamental e w_n sendo a frequência natural do último modo de vibração.

Sistemas contínuos:

$$w_1^2 \leq R(\{v\})$$

Não há limite superior porque $w \to \infty$

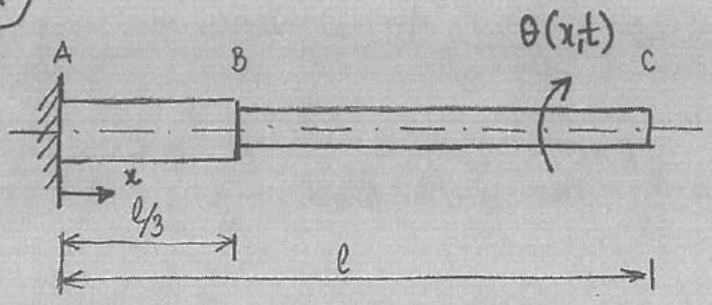
d) Para os sistemas discretos o vector $\{v\}$ pode ser qualquer vector não nulo, sendo que quanto mais próximo ele for da forma modal de frequência natural que se quer calcular, melhor é a aproximação.

Para os sistemas contínuos há 2 abordagens: forma forte e forma fraca. Na forte as funções de aproximação designam-se funções tipo (têm de ser deriváveis um nº de vezes igual à ordem do sistema e têm de obedecer às condições fronteira). Na fraca designam-se funções admissíveis e têm de ser deriváveis um nº de vezes igual a metade da ordem do sistema e têm de verificar apenas as condições fronteira geométricas.

(39)

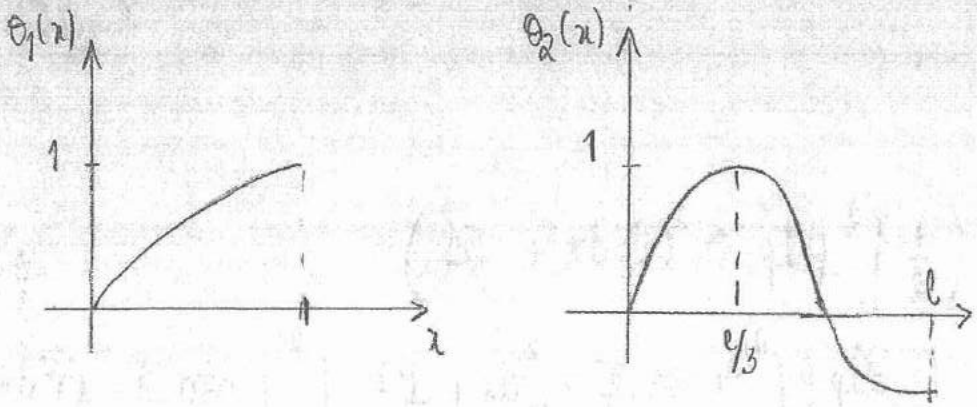
PARTE PRÁTICA

(2.)



a) $\theta_1(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2\ell}$ $\therefore$ $T = \frac{2\pi}{\pi/2\ell} = 4\ell$

$\theta_2(x) = \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{2\ell}$ $\therefore$ $T = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2\ell}} = \frac{4\ell}{3}$



Ambas as funções são deriváveis. $\frac{d\theta_1}{dx} = \frac{\pi}{2l} \cdot \cos \frac{\pi}{2l} \cdot x$

Condições fronteira: $\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{4\ell^2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2l} x$

- Para θ_1

$x = 0 \therefore 1: \quad \theta_1(x)\big|_{x=0} = 0$ ✓

$x = \ell \therefore 2: \quad \frac{d\theta_1(x)}{dx}\Big|_{x=\ell} = 0 \therefore \frac{\pi}{2l} \cos \frac{\pi}{2l} \cdot l = 0$ ✓

- Para θ_2

$x = 0 \therefore 1: \quad \theta_2(x)\big|_{x=0} = 0$ ✓

$x = \ell \therefore 2: \quad \frac{d\theta_2}{dx}\Big|_{x=\ell} = 0$ ✓

F. admissíveis

b) Considerando $\theta_1(x)$ a função de aproximação:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} GI_p\left(\frac{d^2\theta(x)}{dx^2}\right)^2 dx + V_{c/m} =$$

$$= \frac{1}{2}G(2I_p)\int_0^{\ell/3}\left(-\frac{\pi^2}{4\ell^2}\cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2L}\cdot x\right)^2 dx + \frac{GI_p}{2}\int_{\ell/3}^{\ell}\left(-\frac{\pi^2}{4l^2}\cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2L}x\right)^2 dx$$

$$= GI_p\left(-\frac{\pi^4}{16\ell^4}\cdot \ell\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)\right) + \frac{GI_p}{2}\left(-\frac{\pi^4}{16\ell^4}\cdot \ell\left(\frac{1}{2} - \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)\right)$$

$$= -GI_p\frac{\pi^4}{16\ell^4}\left(\frac{\ell}{4} + \frac{-\ell(3\sqrt{3} - 2\pi)}{24\pi}\right)$$

?

0

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\rho I_p\,\theta_1^2(x)\,dx + T/t\right)$$

$$= \omega^2\left(\frac{1}{2}\cdot 2I_p\cdot\rho\int_0^{\ell/3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2L}\cdot x\right)^2 dx + \frac{\rho I_p}{2}\int_{\ell/3}^{\ell}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2L}\cdot x\right)^2 dx =\right.$$

$$= \omega^2\left(\rho I_p\cdot \ell\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right) + \frac{\rho I_p \ell}{2}\left(\frac{1}{2} - 1x\left(\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12\pi}\right)\right)\right.$$

$$= \omega^2\left[\rho I_p\left(\frac{\ell}{4} + \frac{-\ell(3\sqrt{3} - 2\pi)}{24\pi}\right)\right]$$

a) $\theta_1(x,t) = \left(A_1 \cos \frac{w}{c} x + B_1 \operatorname{sen} \frac{w}{c} x\right)(C \cos wt + D \operatorname{sen} wt)$

$\theta_2(x,t) = \left(A_2 \cos \frac{w}{c} \cdot x + B_2 \operatorname{sen} \frac{w}{c} x\right)(C \cos wt + D \operatorname{sen} wt)$

com:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{w}{c}\left(-A_1 \operatorname{sen} \frac{w}{c} x + B_1 \cos \frac{w}{c} \cdot x\right)(C \cos wt + D \operatorname{sen} wt)$$

Condições fronteira:

$$\theta_1(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \quad \therefore \boxed{A_1 = 0}$$

$$\left.\frac{d\theta_2(x,t)}{dx}\right|_{x=\ell} = 0 \therefore -A_2 \operatorname{sen} \frac{w}{c}\ell + B_2 \cos \frac{w}{c} \cdot \ell = 0$$

$$\boxed{B_2 = A_2 \operatorname{tan} \frac{w}{c} \cdot \ell}$$

$$\theta_1(x,t)\Big|_{x=\frac{\ell}{3}} = \theta_2(x,t)\Big|_{x=\frac{\ell}{3}}$$

$$B_1 \operatorname{sen} \frac{w}{c} \cdot \frac{\ell}{3} = A_2 \cos \frac{w}{c} \frac{\ell}{3} + B_2 \operatorname{sen} \frac{w}{c} \cdot \frac{\ell}{3}$$

$$\boxed{B_1 = A_2\left(\operatorname{cotg} \frac{w}{c} \frac{\ell}{3} + \operatorname{tg} \frac{w}{c} \ell\right)}$$

$$\cancel{2} \cancel{I_p} \left.\frac{d\theta_1(x,t)}{dx}\right|_{x=\frac{\ell}{3}} = \cancel{2} \cancel{I_p} \left.\frac{d\theta_2(x,t)}{dx}\right|_{x=\frac{\ell}{3}}$$

$$2B_1 \cos \frac{w}{c} \cdot \frac{\ell}{3} = -A_2 \cdot \operatorname{sen} \frac{w}{c} \cdot \frac{\ell}{3} + B_2 \cdot \cos \frac{w}{c} \cdot \frac{\ell}{3}$$

$$2B_1 = -A_2 \operatorname{tg} \frac{w}{c} \cdot \frac{\ell}{3} + B_2$$

$$2B_1 = A_2\left(-\operatorname{tg} \frac{w}{c} \cdot \frac{\ell}{3} + \operatorname{tg} \frac{w}{c} \ell\right) \quad \therefore \boxed{B_1 = \frac{A_2}{2}\left(\operatorname{tg} \frac{w}{c} \ell - \operatorname{tg} \frac{w}{c} \frac{\ell}{3}\right)}$$

$$\frac{A}{2}\left(\cot g\,\frac{w}{c}\cdot\frac{\ell}{3}+\operatorname{tg}\frac{w}{c}\cdot\ell\right)=\frac{2A}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{w}{c}\ell-\operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{\ell}{3}\right)$$

$$\boxed{2\cot g\,\frac{w}{c}\frac{\ell}{3}+\operatorname{tg}\frac{w}{c}\cdot\ell+\operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{\ell}{3}=0}$$

↳ equação de frequências naturais

PARTE TEÓRICA

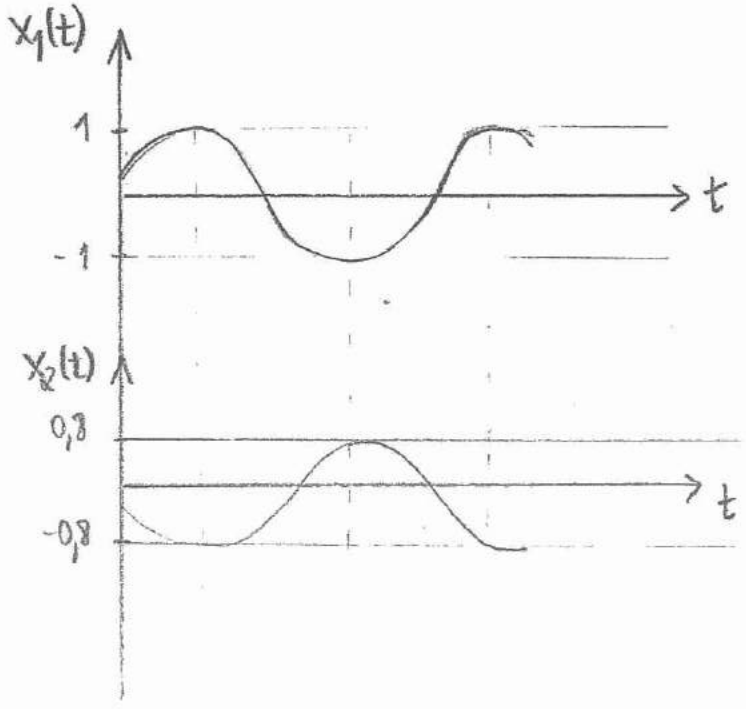
(3.)

a) MODO NATURAL: é um dos n movimentos síncronos $\{x(t)\}_i$ com $i=1,\dots,n$ caracterizados pelas frequências naturais w_i com $i=1,\dots n$ e pelos vectores modais $\{u\}_i$, $i=1\dots n$, que são solução do prob. característico.

FORMA NATURAL: configuração espacial assumida pelo sistema, que é representada por um vector modal $\{u\}_i$, associada a uma frequência natural w_i.

b) $\{u_1\}=\begin{Bmatrix}1\\1,6\end{Bmatrix}$ $\{u_2\}=\begin{Bmatrix}1\\-0,8\end{Bmatrix}$

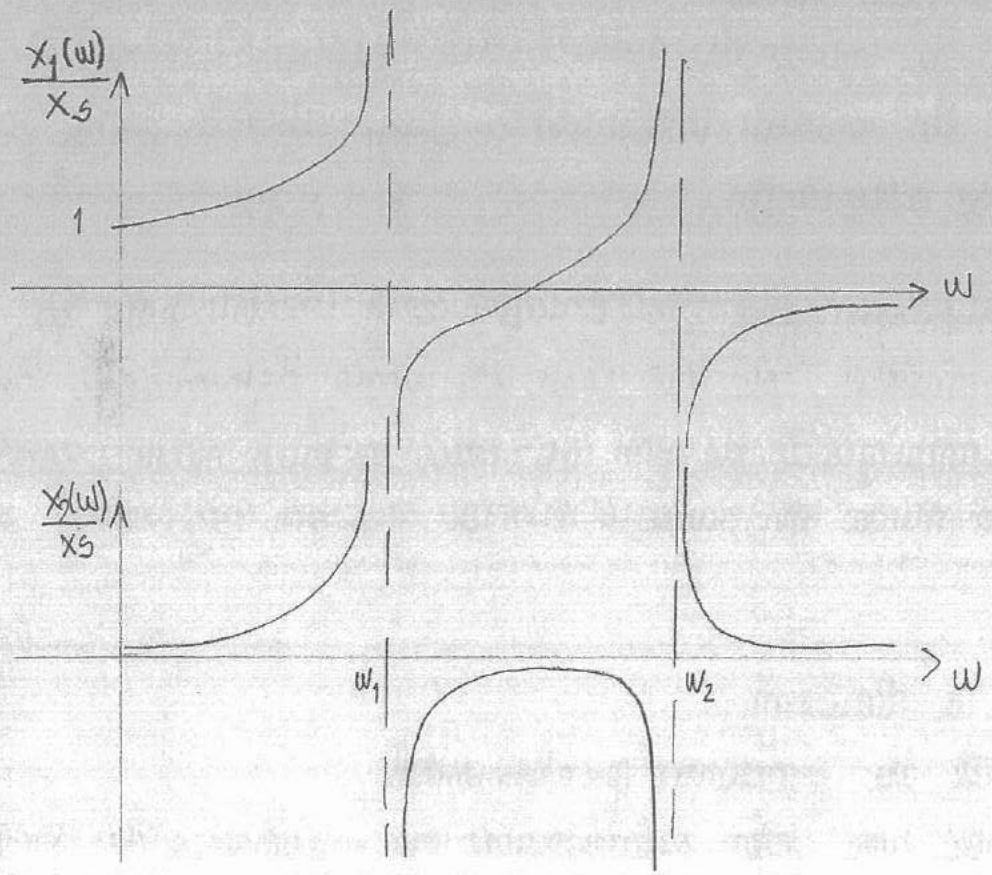
$$\begin{Bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\-0,8\end{Bmatrix}\cos(w_2 t-\phi_2)$$



c) $\{x_0\} = \begin{Bmatrix} \\ 1,6 \end{Bmatrix}$

$\{\dot{x}_0\} = \{0\}$ e $\{f(t)\} = \{0\}$ regime livre

d)



Assumindo que $f(t)$ está aplicado em (1).

- $w < w_1$: movimento em fase
- $w_1 < w < w_2$: movimento em fase e em oposição de fase
- $w > w_2$: movimento em oposição de fase.
- Existe um valor particular de w para o qual $X_1(w) = 0$.

(5.)

a) A propriedade fundamental em que se baseia a técnica da sobreposição modal é a ortogonalidade das formas naturais dos modos modais, uma vez que é esta propriedade que garante que os vectores modais sejam linearmente independentes, e assim, a sua configuração linear possa descrever qualquer vector no espaço de dimensão n (sendo n, o nº vectores modais).

b) [illegible] seleccionar os modos mais influentes na resposta do sistema, e ao eliminar os restantes, o esforço computacional é reduzido.

c) Escolha da base modal:
- escolha do modo de mais baixa energia (+ baixa freq)
- " dos modos associados a freq. naturais próx das freq. de excitação.

d) No caso de solicitações concentradas coincidirem com os nodos desse modo, ou no caso de uma deformação inicial que seja a combinação de um ou mais vectores modais combinados sem incluir o modo em causa e o mov. ser em reg. livre.

(6.)

a) Quociente de Rayleigh:
- majorante da frequência fundamental.
- apresenta um valor estacionário na vizinhança das formas naturais.

b) Pela 2ª propriedade atrás enunciada.

c) Sistemas discretos:

$w_1^2 \leq R(\{v\}) \leq w_m^2$ com w_1 : freq. fundamental
w_m : " natural

Sistemas contínuos: $w_1^2 \leq R(\{v\})$ (Um sup não há : $w \to \infty$)

d) Sistemas discretos { vector $\{v\}$ pode ser qq vector não nulo, sendo que quanto mais próx ele for da forma natural que se quer calcular, melhor é a aproximação

Sistemas contínuos { forma forte e forma fraca.
F. aprox = f. teste
F aprox = f. admissíveis.